Correction du DM3

Q1. f est DSE sur U comme produit de deux fonctions DSE sur U.

Q2. Il suffit d'appliquer la formule donnée. (les hypothèses étant vérifiées car on est sur le disque ouvert de convergence).

Q3. On pouvait réécrire la somme de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1,n_2/n_1+n_2=n} z^{n_1+n_2} * \mathbf{1}_{2|n_1} * \mathbf{1}_{3|n_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n_1,n_2/n_1+n_2=n} \mathbf{1}_{2|n_1} * \mathbf{1}_{3|n_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n * d_n \\
\text{En effet, } d_n &= \sum_{n_1,n_2/n_1+n_2=n} \mathbf{1}_{2|n_1} * \mathbf{1}_{3|n_2}
\end{aligned}$$

où les fonctions $\mathbf{1}_P$ valent 1 si la propriété P est vraie et 0 sinon.

Q4. En dérivant $\frac{1}{1-z}$ on obtenait $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n + 1 z^n$.

Q5. La question 5. était peut-être un peu mal écrite mais ce qui était utile ici était la décomposition en fractions COMPLEXES :

$$f(z) = \frac{1}{6(z-1)^2} + \frac{1}{4(1-z)} + \frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{3i(z-j)} - \frac{1}{3i(z-j^2)}.$$

Q6. On obtenait alors immédiatement :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4} + \frac{j^n}{3i} - \frac{(j^2)^n}{3i} \right) z^n$$

Q7. L'identification des deux séries entières permettait d'écrire :

$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{n+1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4} + \frac{j^n}{3i} - \frac{(j^2)^n}{3i} \\
&= \frac{n+1}{6} + \frac{1+(-1)^n}{4} + \frac{2\sin(2n\pi/3)}{3}
\end{aligned}$$